EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU SECOND ORDRE SANS SECOND MEMBRE

REGIME LIBRE AMORTI

Une équation différentielle du second ordre sans second membre peut toujours se réécrire sous la forme canonique $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0$ Comment la résoudre ?

On écrit une équation du second degré $X^2 + \frac{\omega_0}{Q}X + \omega_0^2 = 0$ appelée équation caractéristique.

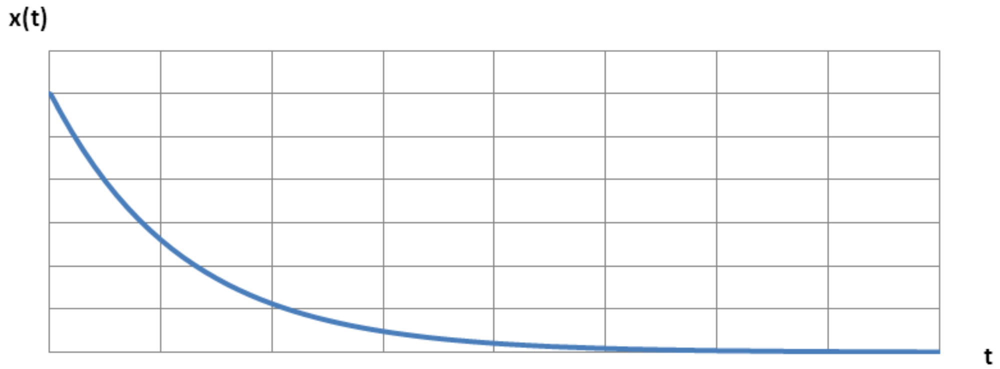
Trois cas sont possibles : le discriminant $\Delta = (\frac{\omega_0}{Q})^2 - 4\omega_0^2$ est négatif, nul ou positif.

2) <u>Pour $\Delta > 0$, c'est-à-dire pour un facteur de qualité Q < ½ c'est le régime apériodique</u>

Les solutions de l'équation caractéristique sont réelles $X_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$.

Pour déterminer x(t) on considère ces deux solutions X_1 et X_2 et on écrit :

$\boxed{x(t) = A\exp(X_1 t) + B\exp(X_2 t)}$ dont la représentation permet de qualifier le régime d'apériodique.



Régime apériodique

Le retour à l'équilibre est lent.

Pour ceux qui sont patients, il est possible de vérifier que la solution est correcte.

La dérivée première est $\frac{dx}{dt} = AX_1\exp(X_1 t) + BX_2\exp(X_2 t)$ et la dérivée seconde

$$\frac{d^2x}{dt^2} = AX_1^2\exp(X_1 t) + BX_2^2\exp(X_2 t)$$

On calcule ensuite $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x(t)$ qui vaut

$$AX_1^2\exp(X_1 t) + BX_2^2\exp(X_2 t) + \frac{\omega_0}{Q}(AX_1\exp(X_1 t) + BX_2\exp(X_2 t) + \omega_0^2(A\exp(X_1 t) + B\exp(X_2 t))$$

c'est-à-dire $A(X_1^2 + X_1\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2)\exp(X_1 t) + B(X_2^2 + \frac{\omega_0}{Q}X_2 + \omega_0^2)\exp(X_2 t)$

c'est-à-dire 0 puisque X_1 et X_2 sont solutions de l'équation caractéristique. retour à BACPLUS.FR