OSCILLATION FORCEES

Lorsqu'un système mécanique ou électrique est soumis à des oscillations forcées, on est amené à résoudre une équation différentielle à second membre sinusoïdal qu'on peut toujours réécrire sous la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0) \qquad \text{équation (1)}$$

La solution est la somme de la solution à l'équation sans second membre $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x(t)=0$, qui très vite tend vers zéro que ce soit à travers un régime pseudo-périodique, apériodique ou critique qui, du fait ne nous intéresse pas (voir article sur ce site), et d'une solution particulière $\underline{x(t)=X_m\cos(\omega t+\varphi)}$ de type sinusoïdale que nous allons examiner. Pour cela, on considère simultanément l'équation différentielle

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{dx_i}{dt}+\omega_0^2x_i(t)=A\sin(\omega t+\varphi_0) \qquad \text{équation (2)}$$

dont la solution sera du type $x_i(t)=X_m\sin(\omega t+\varphi)$. Ainsi, la solution à

$\frac{d^2(x+jx_i)}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{d(x+jx_i)}{dt}+\omega_0^2(x(t)+jx_i(t))=A(\cos(\omega t+\varphi_0)+j\sin(\omega t+\varphi_0))$, équation (1+j2)

obtenue par combinaison linéaire des équations (1) et (2) est notée

$\underline{x(t)}=x_r(t)+jx_i(t)=X_m\exp(j(\omega t+\varphi))$. C'est la grandeur complexe associée à la grandeur réelle $x(t)=X_m\cos(\omega t+\varphi)$ solution de notre problème.

L'équation (1+j2) s'écrit $\frac{d^2\underline{x(t)}}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{d\underline{x(t)}}{dt}+\omega_0^2\underline{x(t)}=A\exp(j(\omega t+\varphi_0))$. Or $\frac{d\underline{x(t)}}{dt}=j\omega\underline{x(t)}$ et

$\frac{d^2\underline{x(t)}}{dt^2}=(j\omega)^2\underline{x(t)}$ donc on peut réécrire $(j\omega)^2\underline{x(t)}+\frac{\omega_0}{Q}(j\omega)\underline{x(t)}+\omega_0^2\underline{x(t)}=A\exp(j(\omega t+\varphi_0))$ d'où

$$(j\omega)^2X_m\exp(j\varphi)+\frac{\omega_0}{Q}(j\omega)X_m\exp(j\varphi)+\omega_0^2X_m\exp(j\varphi)=A\exp(j\varphi_0) \qquad \text{équation (3).}$$

Vous pouvez comparer à l'équation (1) de départ et avec un peu d'habitude vous pourrez directement l'obtenir ! On écrit alors $X_m\exp(j\varphi)=\frac{A\exp(j\varphi_0)}{\omega_0^2-\omega^2+\frac{j\omega\,\omega_0}{Q}}$. Pour déterminer l'amplitude Xm, il suffit de prendre le module soit $\underline{X_m=\frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\frac{\omega_0\omega}{Q})^2}}}$ et pour la phase on détermine l'argument

$$\underline{\varphi=\varphi_0-\arg((\omega_0^2-\omega^2)+\frac{j\omega_0\omega}{Q})}$$